Adjunto de un Operador Lineal

En el espacio vectorial V donde se definen un operador lineal T y un producto interno $\langle \bar{u} | \bar{v} \rangle$, se cumple que

$$\langle T(\bar{u}) | \bar{v} \rangle = \langle \bar{u} | T^*(\bar{v}) \rangle$$

donde T^* es llamado operador adjunto de T. El operador adjunto se basa en la generalización de la matriz transpuesta-conjugada, y que permite establecer la relación entre el operador lineal y el producto interno en el espacio vectorial normado.

Las propiedades de un operador adjunto son

- ✓ $(S^*)^* = S$.
- ✓ Si S tiene inverso, entonces $(S^{-1})^* = (S^*)^{-1}$.
- ✓ $(S^* + T^*) = (S + T)^*$.
- ✓ $(\alpha A)^* = \bar{\alpha} A^*, \forall\, \alpha \in \mathbb{C}$; $\bar{\alpha}$ es el conjugado de α.
- ✓ $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$.
- ✓ Si $T^* = T$, se dice que el operador es autoadjunto.
- ✓ $M_B^B(T) = \overline{[M_B^B(T^*)]}^T$, donde se aplica la transposición-conjugación.

Existen varias formas de obtener el operador adjunto; todas ellas están referidas al producto interno, y a una base ortonormal.

EJEMPLO. Sean el producto interno usual en $\mathbb{R}^3$ y el operador lineal

$$F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \Rightarrow F(x, y, z) = (x - z, -x + 2y + z, -y + z)$$

Su adjunto puede determinarse mediante tres métodos.

PRIMER MÉTODO: REDUCCIÓN E IGUALACIÓN

Se basa en la definición del operador adjunto utilizando la aplicación del producto interno a la regla de correspondencia del operador. En este caso se considera que el adjunto es $F^*(a, b, c) = (p, q, r)$.

$$\langle F(\bar{u}) | \bar{v} \rangle = \langle \bar{u} | F * (\bar{v}) \rangle$$

$$\langle F(x, y, z) | (a, b, c) \rangle = \langle (x, y, z) | F * (a, b, c) \rangle$$
$$\langle (x - z, -x + 2y + z, -y + z) | (a, b, c) \rangle = \langle (x, y, z) | (p, q, r) \rangle$$
$$(x - z)a + (-x + 2y + z)b + (-y + z)c = xp + yq + zr$$

Al desarrollar el lado izquierdo de la última expresión y agrupar términos en x, y y z

$$xa - za - xb + 2yb + zb - yc + zc = xp + yq + zr$$
$$x(a - b) + y(2b - c) + z(b - a + c) =$$

Finalmente, al igualar término a término la parte izquierda con la derecha (según la variable factorizada) se obtiene el adjunto

$$xp = x(a - b), \qquad yq = y(2b - c), \qquad zr = z(-a + b + c)$$

$$\begin{aligned} F^*(a, b, c) &= (p, q, r) \\ &= (a - b, 2b - c, -a + b + c) \end{aligned}$$

SEGUNDO MÉTODO: COMBINACIÓN LINEAL DE UNA BASE ORTONORMAL

Considera la definición del operador adjunto en conjunto con una de sus primitivas: la base ortonormal. El operador $F^*(a, b, c) = \bar{w}$ puede expresarse como combinación lineal de los elementos de la base $B = \left\{(1,0,0), \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$.

$$\bar{w} = \langle (1,0,0) | \bar{w} \rangle (1,0,0) + \left\langle \left(0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \middle| \bar{w} \right\rangle \left(0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left\langle \left(0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \middle| \bar{w} \right\rangle \left(0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Al aplicar la definición de operador adjunto a cada uno de los sumandos, y considerando que $\bar{v} = (a, b, c)$ y $F^*(a, b, c) = \bar{w}$, se pueden simplificar los términos y llegar al adjunto.

$$\begin{aligned} F^*(a, b, c) &= \langle F(1,0,0) | \bar{v} \rangle (1,0,0) + \left\langle F\left(0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \middle| \bar{v} \right\rangle \left(0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &\quad + \left\langle F\left(0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \middle| \bar{v} \right\rangle \left(0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \langle (1, -1, 0) | \bar{v} \rangle (1,0,0) + \left\langle \left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{3}{\sqrt{2}}, 0\right) \middle| \bar{v} \right\rangle \left(0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &\quad + \left\langle \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{2}{\sqrt{2}}\right) \middle| \bar{v} \right\rangle \left(0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= [a - b](1,0,0) + \left[\tfrac{-a + 3b}{\sqrt{2}}\right] \left(0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left[\tfrac{a + b - 2c}{\sqrt{2}}\right] \left(0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

$$= (a-b,0,0) + \left(0, \frac{-a+3b}{2}, \frac{-a+3b}{2}\right) + \left(0, \frac{a+b-2c}{2}, \frac{-a-b+2c}{2}\right)$$

$$F^*(a,b,c) = (a-b, 2b-c, -a+b+c)$$

TERCER MÉTODO: MATRIZ ASOCIADA AL OPERADOR

En este caso se hace uso de la matriz asociada al operador lineal original, tomando como referencia una base ortonormal. Para la base $C = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ la matriz asociada a F se toma como

$$\begin{matrix} F(1,0,0) = (1,-1,0) \\ F(0,1,0) = (0,2,-1) \\ F(0,0,1) = (-1,1,1) \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad M_C^C(F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta matriz se transpone y conjuga para obtener la matriz asociada al operador lineal adjunto. Como es una matriz real, entonces solo basta transponerla.

$$[\, M_C^C(F)]^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ 2b-c \\ -a+b+c \end{pmatrix}$$

Finalmente, se obtiene la regla de correspondencia del adjunto.

$$F^*(a,b,c) \ = (a-b, 2b-c, -a+b+c)$$

En los tres casos, se corrobora que el adjunto de F es

$$F^*(a,b,c) \ = (a-b, 2b-c, -a+b+c)$$

Operador normal

T es un operador normal si $T \circ T^* = T^* \circ T$. En términos de sus matrices asociadas

$$M_B^B(T) M_B^B(T^*) = M_B^B(T^*) M_B^B(T)$$

Esta relación entre las matrices asociadas es válida solamente cuando $M_B^B(T)$ está referida a una base ortonormal B. Un operador normal presenta las siguientes propiedades:

- ✓ $\|T(\bar{v})\| = \|T * (\bar{v})\|$.
- ✓ Si $T(\bar{v}) = \lambda\bar{v}$, entonces $T^*(\bar{v}) = \bar{\lambda}\bar{v}$, donde $\bar{\lambda}$ es el conjugado de λ.
- ✓ Si λ_1 y λ_2 son valores propios asociados a T, entonces $E(\lambda_1)$ es ortogonal a $E(\lambda_2)$.

EJEMPLO. Sea el espacio vectorial $\mathbb{C}^2$ con el producto interno usual. Para determinar si el operador lineal

$$F: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2 \Rightarrow F(x,y) = (-2ix + (-1-i)y, (1-i)x - 3iy)$$

es normal, basta con demostrar que la multiplicación de sus matrices asociadas conmuta.

Una base ortonormal bajo el producto interno usual es $B = \{(i,0),(0,i)\}$, por lo tanto

$$F(i,0) = (2, 1+i), \qquad F(0,i) = (1-i, 3)$$

$$\therefore M_B^B(F) = \begin{pmatrix} -2i & -1-i \\ 1-i & -3i \end{pmatrix} \Rightarrow M_B^B(F^*) = \begin{pmatrix} 2i & 1+i \\ -1+i & 3i \end{pmatrix}$$

Al multiplicarlas

$$\begin{pmatrix} -2i & -1-i \\ 1-i & -3i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2i & 1+i \\ -1+i & 3i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2i & 1+i \\ -1+i & 3i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2i & -1-i \\ 1-i & -3i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 5-5i \\ 5+5i & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5-5i \\ 5+5i & 11 \end{pmatrix}$$

Como la conmutación en la multiplicación de las matrices asociadas se cumple, el operador F es normal.

Si un operador lineal es autoadjunto, entonces las matrices asociadas son la misma; por lo tanto, todo operador autoadjunto es normal.